Раздел 4 | Транспорт. Строительство

УДК 539.3:534.1

Ж.Б. БАКИРОВ,
П.М. АЙТМУКАНОВА,
К.Ш. ШАЛБАЕВ

Об одном точном решении задачи устойчивости кольцевых пластин

Круглые и кольцевые пластины являются элементами многих технологических и энергетических машин: летательных аппаратов, аппаратов химической и пищевой промышленности, встречаются в судостроении и строительстве. Многие из них в процессе эксплуатации испытывают сложное термосиловое воздействие в серединной плоскости. Для таких пластин расчеты на устойчивость в проектировании и их рациональной эксплуатации являются определяющими.

Устойчивость кольцевых пластин впервые рассмотрена Динном, который привел решение для защемленной по обоим контурам пластины в однородном поле напряжений. Позже эта задача при различных граничных условиях рассмотрена Ямаки, а также Мейсснером.

Точные решения можно получить для различных частных случаев сочетания контурных нагрузок. Наиболее изучены осесимметричные формы потери устойчивости, которые возникают при свободных внутренних контурах или при действии сжимающих сил только по внутреннему контуру. При этом точные решения задачи могут быть получены в функциях Бесселя произвольной дробной степени. Точное решение для неосесимметричных форм потери устойчивости некоторые авторы получали, рассматривая поле напряжений, позволяющее свести уравнение устойчивости к уравнению Бесселя [1].

В данной работе рассматривается точное решение задачи устойчивости кольцевых пластин при пропорциональном нагружении контуров равномерно распределенными радиальными силами вида

$$P_1 = P; \quad P_2 = \beta^2 P,$$

где P_1, P_2 – силы на внутреннем и наружном контурах;

$\beta = R_1/R_2$ – отношение внутреннего радиуса пластины к наружному.

В этом случае из решения плоской задачи теории упругости усилия в плоскости пластины будут равны

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \end{bmatrix} = \mp P\beta^2 / x^2,$$

где $x = r/R_2$ – безразмерная радиальная координата.

Этот вид нагружения примечателен тем, что в отличие от предыдущего случая радиальные и окружные докритические напряжения имеют разные знаки во всей области пластины. Такая же картина наблюдается и при приложении растягивающих сил. В этом случае напряжения меняют знак, но их знак остается противоположным. Как известно, выпучивание пластин возможно, если одно из главных напряжений в некоторой области пластины отрицательно. Следовательно в этом случае потеря устойчивости возможна как при «сжимающей», так и при «растягивающей» нагрузке.

Методика решения задачи

При осесимметричном напряженном состоянии путем представления прогиба в виде

$$\omega_{(r,\theta)} = \sum \omega_{n(r)} \cos n\theta$$

основное уравнение устойчивости кольцевых пластин можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям [1]. При рассматриваемом нагружении эти уравнения в безразмерных координатах примут вид:

$$\nabla^2(\nabla^2\omega_n) + \gamma x^{-2}\left(\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega_n}{x\partial x} + n^2\omega_n / x^2\right) = 0, \qquad (1)$$

где оператор $\nabla^2 = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d}{xdx} - \dfrac{n^2}{x^2}$; $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$\gamma = \lambda^2\beta^2;\ \lambda^2 = PR_2^2 / D;$$

D – цилиндрическая жесткость пластины.

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям. В зависимости от опирания контуров пластины возможны следующие граничные условия:

а) защемление (З): $\omega_n = 0, \quad \omega_n' = 0$;

б) шарнирное опирание (Ш):

$$\omega_n = 0, \quad \overline{M}_r = M_r R_2^2 / D = \omega_n'' + \upsilon\omega_n' / x - n^2\upsilon\omega_n / x^2 = 0;$$

в) свободный контур (С):

$$\overline{M}_r = 0, \quad V_c = \overline{V}_r + \lambda^2\omega_n' = 0,$$

где

$$\overline{V}_r = \omega_n''' + \omega_n'' / x - [1 + n^2(2+\upsilon)]\omega_n' / x^2 + n^2(3+\upsilon)\omega_n / x^3.$$

В этих выражениях M_r – изгибающий момент; V_r, V_c – обобщенная и суммарная поперечная сила; υ – коэффициент Пуассона.

Для решения уравнения (1) применим следующие замены переменной и функции:

$$z = \ln x, \quad \omega_{n(x)} = e^z\omega_{n(z)} = e^z\omega_z.$$

Тогда рассматриваемое уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4\omega_z}{dz^4} - 2(1+n^2)\frac{d^2\omega_z}{dz^2} + (1-n^2)^2\omega_z + \gamma\left[\frac{d^2\omega_z}{dz^2} + (n^2-1)\omega_z\right] = 0. \ (2)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего этому дифференциальному уравнению, находятся из выражения

$$k_i^2 = 1 + n^2 - \gamma/2 \pm \sqrt{4n^2 - 2\gamma n^2 + \gamma^2/4}.$$

Теперь решение уравнения (1) записывается в виде: $\omega_{n(x)} = \sum_{i=1}^{4} c_i \exp[(1+k_i)z]$.

Подставляя прогиб в граничные условия, получаем систему из четырех (по два на каждом контуре) однородных алгебраических уравнений относительно C_i. Приравнивая определитель системы к нулю, получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи. Наименьшее значение $\lambda(\alpha)$, удовлетворяющее этому уравнению, является критическим параметром нагрузки.

Решение при действии сжимающих сил

В различных работах по устойчивости кольцевых пластин показано, что, когда радиальные напряжения отрицательны, а тангенциальные – положительны, пластина выпучивается осесимметрично ($n = 0$).

Тогда $k_{1,2} = \pm 1, \quad k_{3,4} = \pm i\sqrt{\gamma - 1} = \pm i\alpha \quad (\gamma > 1)$.

В этом случае выражение для прогиба примет вид

$$\omega_0 = \omega_{(x)} = C_1 + C_2x^2 + C_3x\sin(\alpha\ln x) + C_4x\cos(\alpha\ln x).$$

$$(\alpha = \sqrt{\gamma - 1}).$$

Определим функции, входящие в граничные условия:

$$\omega' = 2C_2x + C_3[\sin(\alpha\ln x) + \alpha\cos(\alpha\ln x)] + $$
$$+ C_4[\cos(\alpha\ln x) - \alpha\sin(\alpha\ln x)];$$

$$\overline{M}_r = 2(1+\upsilon)C_2 + C_3[\alpha(1+\upsilon)\cos(\alpha\ln x) -$$
$$-(\alpha^2 - \upsilon)\sin(\alpha\ln x)]/x - C_4[\alpha(1+\upsilon)\sin(\alpha\ln x) +$$
$$+(\alpha^2 - \upsilon)\cos(\alpha\ln x)]/x$$

$$V_c = 2x\lambda^2\xi_iC_2 + \left(\lambda^2\xi_i - \frac{\alpha^2+1}{x^2}\right)\{C_3[\sin(\alpha\ln x) +$$
$$+\alpha\cos(\alpha\ln x)] + C_4[\cos(\alpha\ln x) - \alpha\sin(\alpha\ln x)]\},$$

где ξ_i – коэффициенты нагружения контуров.

В нашем случае при $x = \beta$ $\xi_1 = 1$, а при $x = 1$ $\xi_2 = \beta^2$. Поэтому на обоих контурах выражение перед фигурной скобкой равно нулю, следовательно:

$$V_c = 2x\lambda^2\xi_iC_2.$$

Используя эти выражения, получаем характеристические уравнения для определения собственных значений задачи.

Приведем характеристические уравнения для различных опираний контуров пластины.

1. Оба контура защемлены (З-З):

$$4\alpha\beta + (1-\beta^2)[(\alpha^2 - 1)\sin(\alpha\ln\beta) + 2\alpha\cos(\alpha\ln\beta)] = 0.$$

Отсюда определяется наименьшее значение α; тогда

$$\lambda_{\min}^2 = (1 + \alpha_{\min}^2)/\beta^2.$$

2. Внутренний контур защемлен, наружный свободен (З-С):

$$\alpha\cos(\alpha\ln\beta) - \upsilon\sin(\alpha\ln\beta) = 0.$$

3. Внутренний свободен, наружный защемлен (С-З):

$$\alpha\cos(\alpha\ln\beta) + \upsilon\sin(\alpha\ln\beta) = 0.$$

4. Оба контура шарнирно оперты (Ш-Ш):

$$4\alpha\beta + (1-\beta^2)\left[\alpha^2 - 1 + \left(\frac{\alpha^2+1}{1+\upsilon}\right)^2\right]\sin(\alpha\ln\beta) -$$
$$-2\alpha(1+\beta^2)\cos(\alpha\ln\beta) = 0.$$

5. Ш-З:

$$4\alpha\beta(1+\upsilon) + \{[2 + \upsilon(1-\beta^2)]\alpha^2 - \upsilon(1-\beta^2) +$$
$$+2\beta^2\}\sin(\alpha\ln\beta) + \alpha[(\alpha^2 - \upsilon)(1-\beta^2) -$$
$$-(1+\upsilon)(1+3\beta^2)]\cos(\alpha\ln\beta) = 0$$

6. З-Ш:

$$4\alpha\beta(1+\upsilon) + [\alpha^2\upsilon(1+\beta^2) - 2 - \upsilon(1-\beta^2)]\sin(\alpha\ln\beta) -$$
$$-\alpha[\alpha^2(1-\beta^2) + 3 + 2\upsilon + \beta^2(1+2\upsilon)]\cos(\alpha\ln\beta) = 0$$

Значения критического параметра нагрузки, рассчитанные с применением программного комплекса Matlab, для первых четырех способов закрепления контуров приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения критического параметра нагрузки (λ^2) для кольцевой пластины, сжатой контурными силами

Схема опирания контуров	Отношение радиусов пластины β								
	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
1.з-з	700	447	364	296	282	325	390	660	874
2.з-с	170	88	57,3	34,5	28,5	27,9	31	46	60
3.с-з	116,5	58	38,5	24	20	20,9	24	39	52
4.ш-ш	200	120	94	74	70	81	105	159	310

Решение при действии растягивающих сил

Если приложенные нагрузки являются растягивающими, то радиальные напряжения положительны, а тангенциальные напряжения отрицательны. Известно, что выпучивание пластин возможно, если одно из главных напряжений является сжимающим. В нашем случае возможна неосесимметричная потеря устойчивости при растягивающих силах. Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2), теперь определяются из выражения

$$k_i^2 = 1+n^2+\gamma/2 \pm \sqrt{4n^2+2n^2\gamma+\gamma^2/4} = B \pm A.$$

Отсюда находим $k_{1,2} = \pm\psi$, $\quad k_{3,4} = \pm i\varphi$,

где $\psi = \sqrt{B+A}$; $\quad \varphi = \sqrt{-B+A}$.

Тогда решения уравнений (1) примет вид:

$$\omega_0 = C_1 + C_2x^2 + C_3x^{1+a} + C_4x^{1-a} \quad (a=\sqrt{1+\gamma});$$

$$\omega_1 = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^{1+b} + C_4x^{1-b} \quad (b=\sqrt{4+\gamma});$$

$$\omega_n = C_1x^{1+\psi} + C_2x^{1-\psi} + C_3x\sin(\varphi\ln x) + C_4x\cos(\varphi\ln x).$$

Найдем выражения для функций, входящих в граничные условия:

$$\bar{M}_{r0} = 2(1+\upsilon)C_2 + C_3(a+1)(a+\upsilon)x^{a-1} + C_4(a-1)(a-\upsilon)x^{-a-1};$$

$$\bar{M}_{r1} = C_2(1+\upsilon)x^{-1} + C_3b(b+1+\upsilon)x^{b-1} + C_4b(b-1-\upsilon)x^{-b-1};$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{rn} &= C_1[(\psi+1)(\psi+\upsilon)-\upsilon n^2]x^{\psi-1} + \\ &+C_2[(\psi-1)(\psi-\upsilon)-\upsilon n^2]x^{-\psi-1} + \\ &+C_3[\varphi(1+\upsilon)\cos\varphi_x - (\varphi^2-\upsilon+n^2)\sin\varphi_x]/x - \\ &-C_4[\varphi(1+\upsilon)\sin\varphi_x + (\varphi^2-\upsilon+n^2)\cos\varphi_x]/x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&V_{c0} = 2x\lambda^2\xi_iC_2; V_{c1} = -\lambda^2\xi_iC_1 - [\lambda^2\xi_i(1+\ln x)+(3+\upsilon)/\\ &/x^2]C_2 + C_3x^{b-2}[(b+1)(b^2-\lambda^2\xi_ix^2-3-\upsilon)+3+\upsilon] + \\ &+C_4x^{-b-2}[-(b-1)(b^2-\lambda^2\xi_ix^2-3-\upsilon)+3+\upsilon];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&V_{cn} = C_1\{-(\psi+1)[\lambda^2\xi_ix^2-\psi^2+1+n^2(2+\upsilon)]+n^2(3+\upsilon)\}\cdot\\ &\cdot x^{\psi-2} + C_2\{(\psi-1)[\lambda^2\xi_ix^2-\psi^2+1+n^2(2+\upsilon)]+n^2(3+\upsilon)\}\cdot\\ &\cdot x^{-\psi-2} + C_3\{(\lambda^2\xi_i - \frac{\varphi^2+1-n^2}{x^2})\sin\varphi_x + \varphi[\lambda^2\xi_i - \\ &-\frac{\varphi^2+1+n^2(2+\upsilon)}{x^2}]\cos\varphi_x\} + C_4\{(\lambda^2\zeta_i - \frac{\varphi^2+1-n^2}{x^2})\cdot\\ &\cdot\cos\varphi_x - \varphi[\lambda^2\xi_i - \frac{\varphi^2+1+n^2(2+\upsilon)}{x^2}]\sin\varphi_x\}\end{aligned}$$

где $\varphi_x = \varphi\ln x$.

Подставляя эти решения в граничные условия, вновь получаем систему из четырех однородных алгебраических уравнений, из которых получаем характеристические уравнения для определения критического параметра нагрузки. Так, для пластины, защемленной по обоим контурам, характеристические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}n=0:\ &(a-1)(\beta+\beta^{-a})[-a-3+(a+1)\beta^2+2\beta^{a+1}] + \\ &+(a+1)(\beta+\beta^{a})[a-3-(a-1)\beta^2+2\beta^{1-a}] = 0;\end{aligned}$$

$$n=1:\quad 4-2(\beta^b+\beta^{-b})+b(\beta^b-\beta^{-b})\ln\beta = 0;$$

$$\begin{aligned}n>1:&-2\psi\varphi+(\varphi^2-\psi^2)\sin(\varphi\ln\beta)sh(\psi\ln\beta)+\\ &+2\psi\varphi\cos(\varphi\ln\beta)ch(\psi\ln\beta)=0.\end{aligned}$$

Если оба контура пластины шарнирно оперты, то характеристическое уравнение имеет вид ($n > 1$):

$$\begin{aligned}&[\varphi^2-\psi^2+(\frac{\varphi^2+\psi^2}{1+\upsilon})^2]\sin(\varphi\ln\beta)sh(\psi\ln\beta)\\ &-2\varphi\psi[1-\cos(\varphi\ln\beta)ch(\psi\ln\beta)]=0.\end{aligned}$$

При наличии свободного контура характеристическое уравнение оказывается громоздким, поэтому его не приводим.

Значения критического параметра нагрузки и соответствующие им количество узловых диаметров, рассчитанные с применением ПК Matlab, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения критического параметра нагрузки (λ^2) для кольцевой пластины, растянутой контурными силами $P_1 = P$, $P_2 = \beta^2P$

Схема опирания контуров	Отношение радиусов пластины β								
	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
1.з-з	2146 3	1385 4	1069 4	840 5	795 7	895 9	1110 12	1850 18	2400 22
2.з-с	756,6 2	520 3	334,3 3	241 3	224 4	238 5	296 7	428 10	570 12
3.с-з	312,3 1	221 1	194,4 2	152 2	153,5 3	176,6 4	179 5	390 8	520 10
4.ш-ш	1692 3	1070 3	820 4	625 4	580 6	664 8	825 11	1375 16	1730 20

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лизарев А.Д. Об устойчивости кольцевых пластин при неоднородном поле напряжений // Прикл. мех. 1980. 16. № 6. С. 92-97.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.