

где:  $\varepsilon_r$  – ускорение после торможения замедлителем;

$\rho$  – расстояние от оси колеса до точки торможения.

Необходимо, чтобы усилие пружины в сжатом виде создавало нормальную реакцию взаимодействия тормозного колеса с ободом колеса колесной пары, которая определяет величину силы трения  $F_{mp} = f_m \cdot N$ , поэтому:

$$N = P_{np},$$

где:  $P_{np}$  – усилие пружины;  $f_m$  – коэффициент трения.

Это значит, что при неоднократном прохождении гребня колеса через тормозной барабан замедлителя, постепенно уменьшается величина скорости вагона.

С учетом конструктивных особенностей каждой сортировочной горки необходимо задаваться такой силой трения  $F_{mp} = f_m \cdot N$ , подставляя значение которого в (11), для определения  $\varepsilon_r$  после действия замедлителя, определим требуемое падение скорости  $\Delta V$  вагона.

Регулирование скорости отцепов на сортировочных горках с использованием предложенного вагонного замедлителя.

#### **Выводы**

Предлагаемый вагонный замедлитель обладает хорошей эффективностью торможения, существенно снижающий скорость движения вагона, позволяет упростить конструкцию, повысить надежность при эксплуатации и снизить материальные затраты на его изготовление, а также улучшит качество сортировочного процесса, повысит сохранность подвижного состава и перевозимых грузов.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Уведомление о положительном результате формальной экспертизы. Исх.31747/17 от 26 декабря 2008 года. г. Астана.

**УДК 629.463.32**

**Мусаев Жанат Султанбекович – к.т.н., доцент (Алматы, КазАТК)**

#### **К ВОПРОСУ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЦИСТЕРНЫ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Рельсовые экипажи представляют собой сложные существенно нелинейные механические системы, расчетные схемы которых при исследовании колебаний и нагруженности элементов их конструкций рассматриваются, как правило, в виде многомассовых систем твердых тел, соединенных упругими и упругодиссипативными элементами [1]. Порядок решаемых систем дифференциальных уравнений, описывающих движение таких систем, нередко достигает нескольких десятков и зависит от особенностей конструкции, принимаемых идеализаций, целей и задач проводимых исследований.

Современные вагоны-цистерны изготавливаются с котлами без расширительных колпаков и для компенсации объема груза при изменении температуры заполняются с некоторым недоливом. Цистерны, независимо от назначения, состоят из котла, рамы (платформы или концевых опор) и ходовых частей. Структурная схема соединения

элементов конструкций цистерн приведена на рис. 1, где приняты следующие обозначения: 1 – котел; 2 – рама; 3,4 – концевые опоры; 5,6 – тележки.

Очевидно, что при выборе расчетной схемы цистерны необходимо учитывать особенности как конструкции, так и транспортируемого груза. При этом математическая модель должна наиболее полно соответствовать реальной системе и вместе с тем быть достаточно простой и удобной для практической реализации с использованием ЭВМ. Поэтому при построении математической модели цистерны наиболее приемлемыми являются методы, позволяющие перейти от системы тело-жидкость к дискретной механической системе с конечным числом степеней свободы.

С учетом конструктивных особенностей вагонов-цистерн введем следующие допущения: рассмотрим котел цистерны, раму и другие элементы конструкции как: абсолютно жесткие тела, а груз - как однородную идеальную и несжимаемую жидкость; примем во внимание деформируемость упругих элементов рессорного подвешивания, поглощающих аппаратов, а также элементов крепления котла к раме (при оценке их нагруженности); положим, что цистерна движется по жесткому горизонтальному или наклонному в вертикальной продольной плоскости участку пути.

Представим котел цистерны в виде горизонтально расположенной цилиндрической емкости, частично заполненной жидкостью. Будем считать перемещения и скорости всех частиц жидкости и стенок полости малыми, т. е. в математическом описании движения жидкости можно пренебречь членами второго и более высокого порядка малости по сравнению с линейными. Кроме того, считаем, что ускорения всех частиц жидкости малы по сравнению с ускорением свободного падения тел, а начальное движение жидкости безвихревое.

При введенных допущениях движение котла, частично заполненного жидкостью, может быть описано [2] подсистемой I обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $N_1 = (n^* + d)$ . В этом случае котел как твердое тело имеет  $d=(1, \dots, 6)$  степеней свободы, а колебания жидкости в емкости характеризуются  $n^*$  обобщенными координатами. Колебания других  $(n - 1)$  твердых тел, входящих в расчетную схему цистерны и соединенных между собой деформируемыми элементами, которые имеют различную реологию, описываются с использованием уравнений Лагранжа второго рода подсистемой дифференциальных уравнений порядка  $N = 2[6(n - 1) - k]$ , где  $n$  - число твердых тел в расчетной схеме цистерны;  $k$  - число связей, наложенных на систему. Из указанных подсистем уравнений формируется полная система уравнений пространственных колебаний цистерны с жидкостью порядка  $N = N_1 + N_2$ , которая в векторно-матричной форме имеет вид:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = Q + Q^*, \quad (1)$$

где  $M = [m_{ij}]$  - матрица инерционных коэффициентов ( $i, j = \overline{1, N}$ );  $B = [b_{ij}]$  матрица, элементами которой являются коэффициенты функции рассеяния;  $K = [k_{ij}]$  матрица квазиупругих коэффициентов;  $q = [q_i]^T$  - вектор обобщенных координат;  $Q = [Q_i]^T$  и  $Q^* = [Q_i^*]^T$  - векторы обобщенных сил, обусловленных, в общем случае, силами взаимодействия экипажей через автосцепки, колес с рельсами, ходовых частей с элементами опор ( $Q_i$ ), а также силами в соединениях котла цистерны с другими элементами конструкции ( $Q_i^*$ ).

Отметим, что через обобщенные силы  $Q_i^*$  осуществляется связь между рассматриваемыми подсистемами уравнений.

Решение системы уравнений (1) может быть получено путем численного интегрирования с использованием ЭВМ, если известны значения коэффициентов матриц  $m_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и  $k_{ij}$ . При формировании этих матриц основная трудность заключается в определении параметров подсистемы I, характеризующей поведение жидкого заполнения,

так как остальные коэффициенты дифференциальных уравнений (1) несложно найти через известные инерционные, диссипативные и геометрические характеристики цистерны. Искомые гидродинамические параметры выражаются через коэффициенты гидродинамических уравнений возмущенного движения котла с жидкостью, определение которых, в свою очередь, связано с решением сложных краевых задач. Следует подчеркнуть, что вычисление указанных коэффициентов для полости заданной конфигурации является центральной проблемой при решении задач динамики твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью.

Рассмотрим колебания котла как твердого тела, содержащего полость с жидкостью. За обобщенные координаты примем его поступательные перемещения  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно вдоль оси пути в горизонтальном, поперечном и вертикальном направлениях, а также углы поворота  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  относительно продольной  $Ox$ , горизонтальной поперечной  $Oy$  и вертикальной  $Oz$  осей координат. Положительные направления угловых перемещений считаем при повороте котла против часовой стрелки, если смотреть вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  от положительного их направления к точке  $O$ . Расположение осей инерциальной  $Oxyz$  и связанной с котлом неинерциальной  $(O_1x_1y_1z_1)$  систем координат показано на рис. 2.

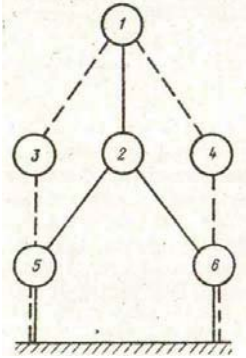


Рисунок 1 - Структурная схема соединения элементов конструкций цистерн

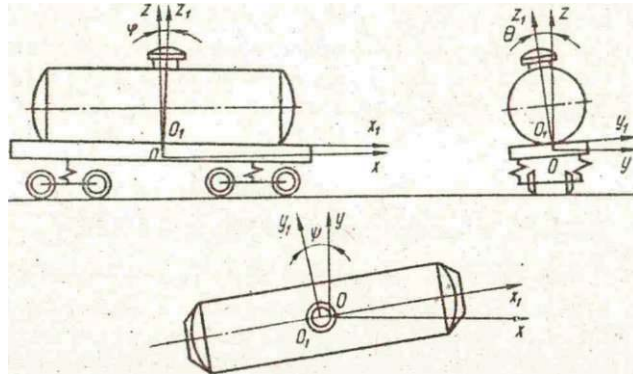


Рисунок 2 - Расположение осей инерциальной  $Oxyz$  и связанной с котлом неинерциальной  $(O_1x_1y_1z_1)$  систем координат

Колебания жидкости в котле характеризуются счетным множеством обобщенных координат  $\zeta_n$  ( $n=1,2,\dots$ ). Будем принимать во внимание, что в случае, когда котел с жидким грузом расположен горизонтально, объем жидкости  $Q$  в невозмущенном состоянии и твердое тело имеет две плоскости симметрии ( $Ozx$  и  $Ozy$ ).

В этом случае система уравнений возмущенного движения распадается на уравнения (2) движения котла с жидкостью как твердого тела в направлении оси  $Oz$ , уравнения (3) вращения вокруг оси  $O_1z_1$  и уравнения движения в двух главных плоскостях  $Ozx$  (4) и  $Ozy$  (5):

$$(m^0 + m)\ddot{z} = Q_z^*; \quad (2)$$

$$(I_{33}^0 + I_{33})\ddot{\psi} + \sum_{n=1}^{n_3^*} \lambda_{0_n 3} \ddot{q}_n = Q_{0_z}^*; \quad (3)$$

$$\mu_{nq}(\ddot{q}_n + \omega_{nq}^2 q_n) + \lambda_{0_n 3} \ddot{\psi} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(m^0 + m)\ddot{x} + (m^0 + m)z_{G_2 \ddot{\varphi}} + \sum_{n=1}^{n_1^*} \lambda_{n_1 \ddot{p}_n} = Q_x^*;$$

$$(I_{22}^0 + I_{22})\ddot{\varphi} + (m^0 + m)z_{G_2 \ddot{x}} - g(m^0 + m)z_{G_2 \varphi} + \sum_{n=1}^{n_1^*} \lambda_{n_2 \ddot{p}_n} = Q_{0_y}^*;$$

$$\mu_{np} (\ddot{p}_n + \omega_{n_p}^2 p_n) + \lambda_{n_1 \ddot{x}} + \lambda_{0_{n_2} \ddot{\varphi}} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (4)$$

$$(m^0 + m) \ddot{y} - (m^0 + m) z_{G_1 \ddot{\theta}} + \sum_{n=1}^{n_2^*} \lambda_{n_2 \ddot{s}_n} = Q_y^*;$$

$$(I_{11}^0 + I_{11}) \ddot{\theta} - (m^0 + m) z_{G_1 \ddot{y}} - g(m^0 + m) z_{G_1 \theta} + \sum_{n=1}^{n_2^*} \lambda_{n_1 \ddot{s}_n} = Q_{0x}^*;$$

$$\mu_{ns} (\dot{s}_n + \omega_{n_s}^2 s_n) + \lambda_{n_2 \dot{y}} + \lambda_{0_{n_1} \theta} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (5)$$

Здесь  $Q_x^*$ ,  $Q_y^*$ ,  $Q_z^*$  и  $Q_{0x}^*$ ,  $Q_{0y}^*$ ,  $Q_{0z}^*$  - проекции на оси  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$  соответственно главного вектора и главного момента внешних сил, действующих на котел;  $I_{ij}$  - элементы тензора инерции присоединенной массы жидкости, обусловленные вращением котла относительно осей  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$  ( $i = j = \overline{1, 3}$ );  $g$  - ускорение свободного падения;  $m$  - масса жидкости (индексом «0» обозначены масса и элементы тензора инерции порожнего котла);  $q_n$ ,  $p_n$ ,  $s_n$  - обобщенные координаты;  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $n_3^*$  - число тонов колебаний жидкости, учитываемых при исследовании;

$$z_{Gi} = z_{G0} + \frac{\Omega_i}{m^0 + m}; \quad \Omega_i = \rho I_i \quad (i = 1, 2),$$

где  $z_{G0}$  - координата центра масс системы котел - жидкость;  $I_i$  - экваториальные моменты инерции площади свободной поверхности жидкости относительно центральных осей;  $\rho$  - плотность жидкости.

Гидродинамические коэффициенты систем уравнений (3) - (5) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{n_1} &= \rho \int_{\Sigma} x_1 \frac{\partial \varphi_{np}}{\partial v} ds; \quad \lambda_{n_2} = \rho \int_{\Sigma} y_1 \frac{\partial \varphi_{ns}}{\partial v} ds; \\ \lambda_{0_{n_1}} &= \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \varphi_{ns} ds; \quad \lambda_{0_{n_2}} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial v} \varphi_{np} ds; \quad \lambda_{0_{n_3}} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial v} \varphi_{nq} ds; \\ I_{ij} &= \rho \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial v} \tilde{\psi}_j ds; \quad \mu_{np} = \frac{\rho \omega_{np}^2}{g} \int_{\Sigma} \varphi_{np}^2 ds; \quad \mu_{ns} = \frac{\rho \omega_{ns}^2}{g} \int_{\Sigma} \varphi_{ns}^2 ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\varphi_{np}$ ,  $\varphi_{ns}$ ,  $\varphi_{nq}$  - гармонические функции, первые из которых являются четными по  $y_l$  и нечетными  $x_l$ , вторые - четными  $x_l$  и нечетными по  $y_l$ , третьи - нечетными по  $x_l$  и  $y_l$ ,  $\omega_{ns}$ ,  $\omega_{np}$ ,  $\omega_{nq}$  - собственные частоты колебаний жидкости, соответствующие собственным функциям  $\varphi_{ns}$ ,  $\varphi_{np}$ ,  $\varphi_{nq}$ ;  $\tilde{\psi}_i$  - компоненты гармонической векторной функции  $\tilde{\psi}$ , являющейся потенциалами смещений частиц жидкости при вращательных движениях котла;  $\Sigma$  - невозмущенная свободная поверхность жидкости;  $S$  - смоченная поверхность котла;  $v$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S \cup \Sigma$ .

Как следует из выражений (6), определение гидродинамических коэффициентов сводится, в основном, к определению функций  $\varphi_{ns}$ ,  $\varphi_{np}$ ,  $\varphi_{nq}$  и  $\tilde{\psi}_i$ , которые могут быть найдены из решения следующих краевых задач:

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } Q;$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = \kappa_n \varphi_n \text{ на } \Sigma; \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S; \quad (7)$$

$$\Delta \bar{\psi} = 0 \text{ в } Q;$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nu} = [\bar{R}_G \times \nu] \text{ на } \Sigma; \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nu} = [\bar{R} \times \nu] \text{ на } S;$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа;  $\bar{R}_G$  - радиус- вектор от точки  $O$  до центра тяжести площади свободной поверхности жидкости, затвердевшей в невозмущенном состоянии;  $\bar{R}$  - радиус-вектор произвольной точки на поверхности  $S$ ;  $Q$  - объем, занимаемый жидкостью;  $\kappa_n = \frac{\omega_n^2}{g}$

В задаче (7)  $\varphi_n = \varphi_{np}$  при  $\omega_n = \omega_{np}$ ,  $\varphi_n = \varphi_{ns}$  при  $\omega_n = \omega_{ns}$ ,  $\varphi_n = \varphi_{nq}$  при  $\omega_n = \omega_{nq}$ ; знак «х» - векторное произведение.

В случае, когда котел цистерны имеет наклон в вертикальной продольной плоскости пути, система котел - жидкость имеет только одну плоскость симметрии -  $Oxz$ . Возмущенное движение котла, частично заполненного жидким грузом, описывается уравнениями (2), (4) и следующей системой уравнений совместного движения котла с жидкостью в плоскости  $Ozy$  и при вращении его вокруг оси  $Oz$ :

$$(m^0 + m)\ddot{y} - (m^0 + m)z_{G_1\ddot{\theta}} + \sum_{n=1}^{n_2^*} \lambda_{n_2\ddot{s}_n} = Q_y^*;$$

$$(I_{33}^0 + I_{33})\ddot{\psi} + (I_{31}^0 + I_{31})\dot{\theta} + \sum_{n=1}^{n_2^*} \lambda_{n_3\ddot{s}_n} = Q_{0z}^*;$$

$$(I_{11}^0 + I_{11})\ddot{\theta} + (I_{13}^0 + I_{13})\dot{\psi} - (m^0 + m)z_{G_1\ddot{y}} - g(m^0 + m)z_{G_1\theta} + \sum_{n=1}^{n_2^*} \lambda_{0n_1\ddot{s}_n} = Q_{0x}^*;$$

$$\mu_{ns}(\ddot{s}_n + \omega_{ns}^2 s_n) + \lambda_{n_2\ddot{y}} + \lambda_{0n_3\ddot{\psi}} + \lambda_{0n_1\ddot{\theta}} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (9)$$

Здесь

$$I_{13} = I_{31} = \oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial \nu} \tilde{\psi}_3 ds.$$

#### Выводы:

При предварительно вычисленных значениях гидродинамических коэффициентов (6) системы уравнений (2) - (5) или (2), (4) и (9) могут быть включены в полную систему уравнений (1), описывающих колебания цистерны с жидкостью. Представление котла цистерны в виде горизонтально расположенной цилиндрической емкости, частично заполненной жидкостью, перемещения и скорости всех частиц жидкости и стенок полости малыми, ускорения всех частиц жидкости малы по сравнению с ускорением свободного падения тел, а начальное движение жидкости безвихревое – все эти допущения, позволяют решить систему уравнений пространственных колебаний цистерны с жидкостью путем численного интегрирования с использованием ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демин Ю.В., Богомаз Г.И., Науменко Н.Е. Динамика машиностроительных и транспортных конструкций при нестационарных воздействиях. Киев, Наукова думка, 1995, 188 с.
2. Богомаз Г. И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. Киев, Наукова думка, 2004, 223 с.